Разберём совсем простые и тупые задачи уровня молекулы, которые я бы не разбирал, если бы их не было бы на экзамене и коллоквиуме.
Задача 53:

Задача 31. Исходя из распределения Максвелла (см. § 6, п. д))

$$w(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2\theta}\right\},$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, написать распределение по компоненте v_x, по модулю скорости $v = |\mathbf{v}|$ и по кинетической энергии частицы $\varepsilon = mv^2/2$. Определить средние значения этих величин, наивероятнейшие их значения, их дисперсии и относительные флуктуации.

Решение. Одномерное распределение содержится в трехмерном как один из составляющих его сомножителей:

$$w(\mathbf{v}) = w(v_x)w(v_y)w(v_z), \quad w(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2\theta}\right\}.$$

Переходя в трехмерном распределении, записанном в декартовых координатах v_x, v_y, v_z, к сферическим координатам в пространстве скоростей $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, ϑ, φ и соответственно преобразуя элемент объема

$$d\mathbf{v} = dv_x\, dv_y\, dv_z \to v^2\, dv \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

получаем

$$w(v, \vartheta, \varphi)\, dv\, d\vartheta\, d\varphi = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{-mv^2}{2\theta}\right\} v^2\, dv \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Интегрируя по углам (полный телесный угол равен 4π), имеем

$$w(v) = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, w(v, \vartheta, \varphi) = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2\theta}\right\} 4\pi v^2.$$

Распределение по кинетической энергии получается при подстановке $v^2 = 2\varepsilon/m$; $dv = (2m\varepsilon)^{-1/2}\, d\varepsilon$:

$$w(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi\theta^3}} e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{1/2}.$$

Графики этих распределений приведены на рис. 29, *а–в*.

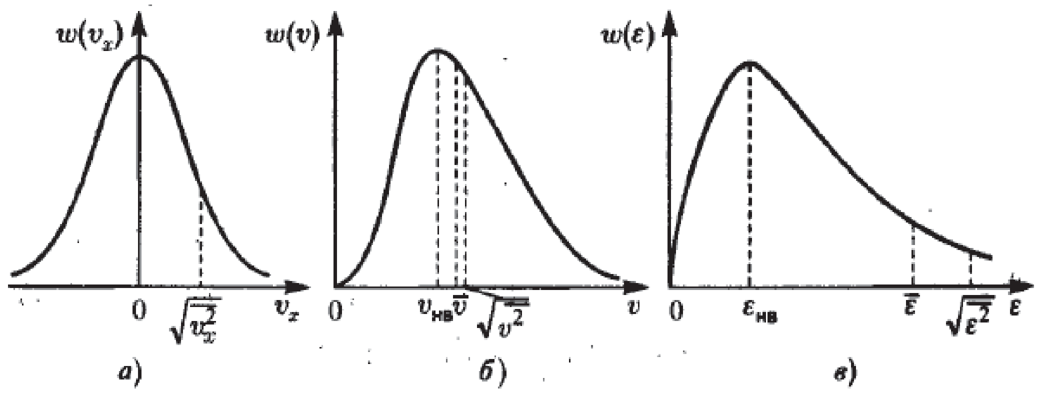


Рис. 29. Графики плотностей функций распределения по компоненте скорости v_x, по модулю скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ и по кинетической энергии $\varepsilon = mv^2/2$ в классической равновесной системе

Приравнивая нулю производные от $w(v_z)$, $w(v)$ и $w(\varepsilon)$ соответственно по v_z, v и ε, получаем наивероятнейшие их значения:

$$(v_z)_{\text{нв}} = 0, \quad v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2\theta}{m}}, \quad \varepsilon_{\text{нв}} = \frac{\theta}{2}.$$

Средние значения рассчитываются с помощью стандартных интегралов пуассоновского типа (см. задачу 1):

$$\overline{v_z} = 0, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8\theta}{\pi m}}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}\theta.$$

Так же рассчитываются и средние от квадратов:

$$\overline{v_z^2} = \frac{\theta}{m}, \quad \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\frac{\theta}{m}, \quad \overline{\varepsilon^2} = \frac{15}{4}\theta^2.$$

Интересно сравнить на графиках рис. 29, *б*) и *в*) характерные масштабные величины:

$$\frac{\bar{v}}{v_{\text{нв}}} \cong 1{,}13; \quad \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{v_{\text{нв}}} \cong 1{,}22; \quad \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{\text{нв}}} = 3; \quad \frac{\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}}{\varepsilon_{\text{нв}}} \cong 3{,}87.$$

Для дисперсий рассматриваемых величин, характеризующих квадраты ширины соответствующих распределений, и относительных флуктуаций на основе выписанных выше величин получаем

$$\overline{(\Delta v_z)^2} = \overline{v_z^2} - (\overline{v_z})^2 = \frac{\theta}{m}; \qquad \delta_{v_z} = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta v_z)^2}}}{\overline{v_z}} = \infty;$$

$$\overline{(\Delta v)^2} = \overline{v^2} - (\bar{v})^2 = \frac{\theta}{m}\left(3 - \frac{8}{\pi}\right); \qquad \delta_v = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta v)^2}}}{\bar{v}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8} - 1} \cong 0{,}424;$$

$$\overline{(\Delta \varepsilon)^2} = \overline{\varepsilon^2} - (\bar{\varepsilon})^2 = \frac{3}{2}\theta^2; \qquad \delta_\varepsilon = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta \varepsilon)^2}}}{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cong 0{,}816.$$

Это всё делалось на молекуле. Единственная сложность – при взятии «стандартных интегралов пуассоновского типа»

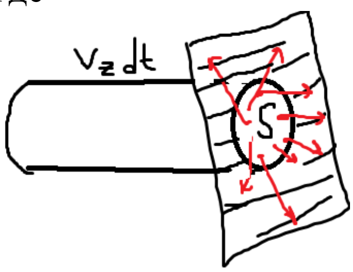
Задача 56

Рассчитать среднюю (в расчете на одну вылетающую частицу) энергию частиц идеального нерелятивистского классического газа, вылетающих в вакуум из небольшого отверстия в стенке сосуда.

Среднее число частиц, вылетевшее за время t через отверстие S, равно

$$\int\limits_{v_z > 0} \left[n(v_z \cdot dt \cdot S)\right] w(\vec{v}) d^3v$$

где $\left[n(v_z \cdot dt \cdot S)\right]$ - число частиц в объёме $v_z \cdot dt \cdot S$:



А средняя энергия, ими уносимая, будет

$$\int\limits_{v_z>0} \frac{mv^2}{2}\left[n(v_z\cdot dt\cdot S)\right] w(\vec{v})d^3v$$

Теперь считаем этот интеграл:

$$\iiint \frac{mv^2}{2} n v_z dtS\omega(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z$$
$$= dtS\int\limits_0^\infty \frac{m{v_x}^2}{2}\omega(v_x)dv_x + \int\limits_0^\infty \frac{m{v_y}^2}{2}v_y\,\omega(v_y)dv_y$$
$$+\int\limits_0^\infty \frac{m{v_z}^2}{2}v_z\,\omega(v_z)dv_z$$

Средняя кин.энергия по x и y будет θ/2, а вот по z в интеграле стоит дополнительно v_z (выделил красным), поэтому

$$\int\limits_0^\infty \frac{m{v_z}^2}{2}v_z\,\omega(v_z)dv_z = \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty m{v_z}^2\,\omega(v_z)dv_z^2$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty mv_z^2\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m{v_z}^2}{2\theta}\right)dv_z^2$$

Аккуратный подсчёт этого интеграла (а его многие семинаристы не считают, потому что лень) даст θ. А средняя общая энергия будет $\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}+\theta = 2\theta > \frac{3\theta}{2}$

Т.е. улетучиваются наиболее быстрые молекулы, энергичные.